Salviamo la geometria solida!
Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori

Gianfranco Arrigo
A.S.P. Alta Scuola Pedagogica di Locarno

Silvia Sbaragli
N.R.D. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori.* In: D'Amore B., Sbaragli S. (2004). *Il grande gioco della Matematica 2*. Atti del convegno di Lucca. 10-11 settembre 2004.

Abstract. *The teaching of geometry in our schools is still too much dependent on the axiomatic-deductive method introduced by Euclid three centuries before Christ and re-proposed by Hilbert at the end of the XIX century. Without denying the historical, philosophical and scientific value of these axiomatic approaches we must point out that from a didactic point of view a transposition in school of this way of interpretating geometry is an unsuccessful operation. To get out of this unseemly situation we propose a completely different way of learning geometry based on the presupposition that this subject offers one of the most important mathematical languages for reality modellization. We therefore start from real objects, that are always three-dimesional, and we construct geometric models of them switching, according to the cases, from the three-dimensional to the two-dimensional and viceversa.*

1. Introduzione

Da qualche anno ci dedichiamo, fra l'altro, alla rivalutazione della geometria solida, troppo spesso dimenticata, proponendo argomentazioni e motivazioni specifiche relative a ciascun livello scolastico (Arrigo e Sbaragli, 2004).
Se iniziamo dall'osservazione delle attività geometriche che tradizionalmente vengono proposte nella scuola dell'infanzia, si evidenzia la presenza diffusa di un'impostazione centrata principalmente su attività riguardanti il piano. Di solito, cioè, gli insegnanti richiedono ai bambini prestazioni 2D[4] e, solo

[4] Abbiamo scelto di sintetizzare la dicitura "bidimensionale" con 2D e "tridimensionale" con 3D.

successivamente, e non sempre, propongono esperienze 3D; lo stesso atteggiamento si riscontra tra gli insegnanti di tutti gli altri livelli scolastici.
Le attività vengono inizialmente affrontate nel reale, facendo vivere l'esperienza al bambino con il proprio corpo, successivamente viene chiesto agli allievi di riprodurre l'attività sul piano, sottovalutando così le notevoli difficoltà di rappresentazione (grafiche, manipolative, prospettiche, ...) che una richiesta di questo tipo comporta. Ancora, capita spesso di imbattersi in insegnanti che tentano di far riconoscere ai bambini, fin dai 4 anni, le diverse figure geometriche piane: triangoli, quadrati, rettangoli, circonferenze, … sottovalutando ancora una volta le difficoltà che possono incontrare i bambini ad astrarre, nell'immaginare, ad esempio, un oggetto reale (necessariamente 3D) senza spessore.[5] Viene spontaneo domandarsi: da dove deriva quest'ansia di voler far apprendere prima possibile il nome delle figure piane, come se in esse fosse raccolta l'intera essenza della geometria? Sicuramente da uno sviluppo più o meno consapevole di una "logica euclidea" che parte dal 2D per poi passare al 3D, dato che il 2D richiede meno assiomi per essere trattato rispetto al 3D. Ma una cosa è l'impostazione dei matematici e un'altra è quella didattica: *«… troppo spesso l'insegnamento tradizionale si appiattisce in una acritica ripetizione di parti più o meno significative degli Elementi di Euclide»* (Speranza, 1987), che risulta praticamente impossibile da essere "trasposta" (D'Amore, 1999) per questi livelli scolastici. Questo atteggiamento fa sì che la geometria scolastica sia basata quasi esclusivamente su definizioni centrate sul piano, difficili da essere comprese dai bambini e spesso mal poste dal punto di vista matematico, che sottovalutano l'importanza della geometria 3D più intuitiva per il bambino, essendo una lettura della realtà "visibile", "tangibile" ed immediata.
A nostro parere, risultano più "naturali", per i bambini di scuola dell'infanzia e primaria, modelli ed attività che rientrano nella geometria 3D (Cottino e Sbaragli, 2004), piuttosto che in quella 2D, anche se siamo consapevoli che ciascun oggetto o rappresentazione mostrata per far intuire un concetto matematico, non può che esserne solo un modello, e in quanto tale non potrà mai possedere le caratteristiche di idealità, perfezione, astrazione, generalità tipiche di un oggetto matematico. Il discorso può essere esteso alla scuola media e alle superiori perché, in quegli ordini scolastici si dovrebbe affinare soprattutto la capacità dell'allievo a costruire modelli matematici di situazioni reali. Ora, la realtà, come

[5] A tale proposito, viene spontaneo ricordare un'attività ancora presente sia nella scuola dell'infanzia che nella scuola primaria che consiste in un uso acritico dei famosi "blocchi logici" (varie forme di diverso colore, estensione, spessore) con i quali si insegna ai bambini ad osservare e a confrontare figure piane, per le quali si fa notare persino il diverso "spessore", quando poi, dopo qualche anno, si dovrà rompere l'immagine proposta, affermando che le figure piane possiedono solo due dimensioni.

ben sappiamo, è del tipo 3D, quindi la sola geometria 2D non permetterebbe di svolgere in modo adeguato questo compito.
Acquista così un forte significato didattico coinvolgere i bambini, sin dall'infanzia, in attività che partono da figure solide per poi passare al piano, tutte le volte che lo si reputa necessario. In quest'ottica, è bene tener conto che i bambini all'ingresso nella scuola primaria avranno già numerose competenze "ingenue" (Aglì e D'Amore, 1995) anche relative al mondo 2D, acquisite in ambiente scolastico o extrascolastico, che non devono essere sottovalutate. A tale proposito, la dice lunga, circa le immagini mentali in corso di formazione, questa affermazione di una bambina:*«Il cubo è un quadrato cicciotto»* (Anna, 5 anni).
In effetti, pur partendo da figure solide, i bambini faranno già spontaneamente numerose considerazioni sul piano. Da questo punto di vista, il nostro "slogan" sembra essere diventato: *«Proponendo attività nello spazio, si tratterà anche il piano; proponendo attività nel piano, si rimarrà esclusivamente nel piano!»*.
Nella scuola primaria, dopo essere inizialmente passati dallo spazio al piano, consigliamo di continuare a giocare tra questi due mondi, con continui e frequenti passaggi tra l'uno e l'altro (Cottino e Sbaragli, 2004), iniziando negli ultimi anni di questo livello scolastico, una sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico (ovviamente, adatta all'età cognitiva dell'allievo) che proseguirà in maniera più critica negli ordini di scuola successivi. Ma anche in questi ultimi, i passaggi da 3D a 2D, dalla realtà al modello geometrico e viceversa, dovrebbero ispirare la pratica usuale della geometria in classe.
Purtroppo, nella scuola media, l'approccio seguito tradizionalmente ricalca ancora il classico percorso euclideo dal piano allo spazio a partire dal primo anno, o addirittura in alcuni casi solo dal secondo (perdendo così la continuità con la scuola primaria). La nostra idea di fondo è anche quella di collegare i vari ordini di scuola per evitare l'insorgere di fratture o di fastidiose sovrapposizioni nell'itinerario di apprendimento della geometria. Una tale impostazione può avvalersi della tecnica di *insegnamento a spirale*, decisamente più adatta. È opinione comune che la geometria che si può insegnare nella scuola dell'obbligo è una geometria prevalentemente intuitiva, non essendo possibile affrontare a questa età l'aspetto assiomatico-deduttivo. Riteniamo quindi che la rigorosa costruzione di Euclide (per non parlare di quella di Hilbert) non abbia nulla in comune con la costruzione personale della conoscenza che deve avvenire da parte dell'allievo in questo livello scolastico. In linea con l'assunto secondo il quale il sapere non viene banalmente dispensato dall'insegnante all'allievo, ma viene necessariamente reinterpretato per esigenze didattiche (D'Amore, 1999; Fandiño, 2002), ipotizziamo un percorso intuitivo, più vicino al "sapere personale" di ogni singolo allievo; sapere che, poi, a poco a poco evolverà verso il "sapere istituzionale".

Da questo punto di vista, riteniamo che si possa prendere seriamente in considerazione un'impostazione legata all'insegnamento congiunto della geometria piana e di quella solida, presentando motivanti situazioni nelle quali l'insegnante cercherà di giustificare e di collegare tra loro gli apprendimenti avvenuti, fino ad arrivare ad una vera e propria interpretazione algebrica dei fatti geometrici, e viceversa, così da creare reti di sapere sempre più vaste che verranno poi organizzate in un sistema più strutturato nella scuola superiore. L'obiettivo è quello di riuscire a graduare il rigore dell'attività geometrica passando da osservazioni di carattere intuitivo (tipo quelle possibili nella scuola primaria) a gradi di astrazione sempre più profondi e consapevoli nella scuola superiore.
Purtroppo, almeno in Italia, in quest'ultimo livello scolastico, lo studio della geometria solida rischia addirittura di scomparire, a dispetto di quanto è scritto nei programmi ufficiali, che, se interpretati correttamente, non indicano affatto di trattare una geometria esclusivamente piana. Le cause del fenomeno dell'abbandono progressivo della geometria 3D negli istituti superiori sono molteplici, e, a nostro parere, hanno origine nella caratteristica dell'insegnamento secondario superiore basata sull'eccessiva preoccupazione contenutistica che porta gli insegnanti a voler essere il più possibile completi e rigorosi. Questo porta all'appesantimento del tessuto matematico trattato in classe e all'impossibilità pratica di fare tutto ciò che si vorrebbe svolgere, molto spesso interpretando pedantemente i programmi e deducendo da essi anche ciò che non dicono.
Accogliamo volentieri l'invito di Cerasoli (1999) ad avere il coraggio di tagliare i "rami secchi" dai programmi di matematica, per far posto ad attività diverse (più che a nozioni), che comprendano, aggiungiamo noi, anche elementi essenziali di geometria dello spazio. Ipotizziamo quindi, fin dal biennio, un approccio alla geometria come modello della realtà, quindi "naturalmente" 3D, comprendente lo spazio 2D come caso particolare.
Inoltre, nella scuola secondaria superiore, la geometria costituisce un ambiente ideale per dare la possibilità agli allievi di usare metodologie matematiche diverse: «*Una tendenza diffusa e in un certo modo spiegabile vorrebbe portare, per una disciplina scientifica, a una esposizione unitaria: ma la geometria è per sua natura complessa e non riducibile a un percorso unitario*» (Speranza, 1995). È certo che in ogni ordine di scuola è possibile sollecitare gli allievi ad usare modi diversi, sempre rinnovabili, per la risoluzione di problemi, e questo può avvenire in particolare nelle superiori raggiungendo in questo modo due importanti traguardi: da una parte poter constatare che applicando conoscenze diverse si giunge alle stesse conclusioni, dall'altra che, dovendo risolvere un determinato problema, la prima riflessione da fare è diretta alla scelta del metodo matematico più opportuno. Le metodologie matematiche che possono essere usate dagli

studenti sono, fra le altre: il *metodo sintetico*, *trigonometrico*, *delle trasformazioni geometriche*, *analitico*, *vettoriale*, *differenziale* (Arrigo e Sbaragli, 2004).
In linea con il pensiero di Speranza (1995) riteniamo che: «*La geometria, a tutti i livelli, deve dare agli allievi una sensibilità spaziale, deve rafforzare la componente "visualizzazione" del nostro modo di concepire il mondo, deve gettare un ponte fra sensibilità e razionalità…*».
A supporto delle precedenti considerazioni, sono scaturite diverse proposte di attività che possono essere interpretate all'interno di un percorso verticale che può iniziare nella scuola dell'infanzia e continuare fino alla scuola superiore. Tali sollecitazioni sono state ampiamente sperimentate e valutate dagli insegnanti come "vincenti" da diversi punti di vista: coinvolgenti, motivanti e di forte valenza formativa.

2. Itinerario in "continuità" dall'infanzia alle superiori: i percorsi e i solidi

Tra le tipiche attività che solitamente vengono proposte nella scuola dell'infanzia vi sono i diversi tipi di percorsi: liberi, obbligati, di tappa in tappa, labirinti, gincane, cacce al tesoro, … (D'Amore, 1981; D'Amore e Manini, 1985) che inizialmente vengono vissuti dai bambini nel reale, all'interno della sezione, in salone o in giardino, successivamente vengono proposti direttamente nel piano [la richiesta del "disegno", che sembra ormai essere diventata una clausola del *contratto didattico* (Baldisserri et al., 1993)], passando così immediatamente al mondo bidimensionale. Purtroppo, avviene molto raramente la richiesta da parte dell'insegnante di eseguire percorsi in ambienti tridimensionali, dove non è il bambino che realizza personalmente l'attività con il proprio corpo, ma la esegue dall'"esterno" tramite un pupazzino.

Noi riteniamo più idoneo, per bambini di scuola dell'infanzia e dei primi anni di scuola primaria, passare dalla realizzazione di un plastico o di vari plastici (uno per ogni bambino) che rispecchi la situazione vissuta nel reale, prima di effettuare un'attività nel piano. Il plastico rappresenterà così un importante anello di congiunzione tra la realtà e la rappresentazione con l'uso della sola matita in ambiente 2D; operando in questo modo si avranno notevoli cambiamenti nelle realizzazioni 2D dei bambini, che saranno più verosimili rispetto a quelle ottenute senza la mediazione del plastico, dato che quest'ultimo ambiente consente la

visione da un punto di vista diverso da quelli quotidianamente possibili (Arrigo e Sbaragli, 2004).
Questo tipo di attività può avvenire in diversi modi: si può chiedere di costruire un plastico del percorso vissuto nel reale, della propria sezione, oppure il plastico dell'intera scuola (chiedendo ai bambini di assemblare tra loro le diverse stanze che la formano) o ancora l'insegnante può fornire agli allievi un primo "abbozzato" plastico della scuola, sul quale è possibile fare interessanti considerazioni e modifiche in base a ciò che si osserva nel reale.
Da questo punto di vista è stata eseguita una sperimentazione nella scuola dell'infanzia di Morro d'Alba (AN), dalla quale sono scaturiti interessanti risultati:

I: Che cosa sarà questo?
F.: È la nostra scuola dentro la scuola!
G.: Bisogna aggiustarla, non è proprio così!
A.: C*'è un errore qui, ci dovrebbe essere un muro e invece non c'è.*
G.: Sì, qui ci doveva essere un muro, vedi quel muro lì (indica la parete nel reale), *la dobbiamo fare.*

Con questo tipo di proposte è possibile sviluppare numerose capacità: localizzazione e organizzazione spaziale; orientamento, progettazione e invenzione; padronanza di sistemi di rappresentazione; riconoscimento e descrizione di alcune delle principali relazioni spaziali (come: sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, vicino/lontano, …). Inoltre, queste attività permettono di dare il via ad un primo approccio relativo alla misura: alcuni bambini tenteranno di tener conto delle proporzioni fra le distanze, mentre altri daranno solamente importanza al numero degli elementi da rappresentare, ma non alla loro distribuzione spaziale rispetto al reale.

M.: La colonna è un po' bassina, bisogna alzarla un po'.

A.:… se te fai le colonne così grosse non c'è lo spazio per la ringhiera.

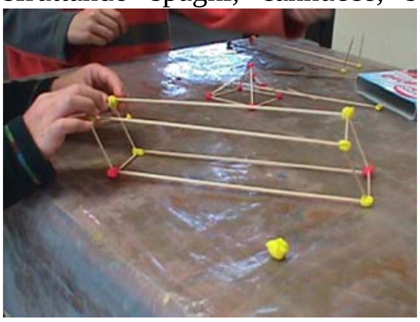
Sarà così possibile realizzare percorsi prima nel reale, poi nel plastico e infine nel piano, giocando così tra spazio e piano, e viceversa.

Sempre nell'ottica di partire da attività riguardanti lo spazio, per quanto riguarda la scuola dell'infanzia e la scuola primaria, in questi anni abbiamo proposto di iniziare dall'analisi di figure solide prima di osservare quelle piane. È quindi possibile riconoscere le specifiche caratteristiche dei diversi solidi, manipolandoli, facendoli rotolare, confrontandoli.

C.: Questa non rotola, perché picca, è appuntita

È anche possibile costruire modelli di solidi con facce "piene" tramite cartoncino, polistirolo, legno, oppure modelli di solidi "scheletrati" realizzati con pongo e stuzzicadenti (Sbaragli, 2002). A seconda del modello ottenuto, si punterà l'attenzione sulle facce o sui vertici e spigoli che lo formano, inoltre si noteranno le relazioni che legano questi enti. Scoperte queste caratteristiche, sarà possibile realizzare percorsi sui solidi, effettuando cammini che possono variare per il punto di partenza o di arrivo (vertici del cubo, punti delle facce o punti degli spigoli diversi dagli estremi), per la lunghezza, le direzioni scelte, …; ma dopo un po' le strade possono apparire tutte analoghe, quindi per non annoiarsi, è possibile cercare percorsi alternativi sfruttando spaghi, cannucce, stuzzicadenti di diverse lunghezze (Cottino e Sbaragli, 2004), oppure si possono inventare nuove e motivanti situazioni problematiche. Ad esempio, tra i vari percorsi che si possono creare lungo gli spigoli di un prisma "scheletrato", è possibile scegliere quelli che uniscono un vertice con il suo vertice opposto (che non hanno facce in comune). Dopo aver focalizzato su quali vertici si vuole concentrare l'attenzione, ci si può chiedere quanto è lunga la strada più breve che li unisce. La risposta è tre spigoli, ciascuno di direzione diversa. Ma quanti di questi percorsi minimi esistono?

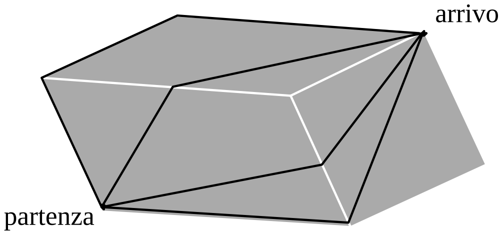
F.: questo è un cubo, è uguale a questo qua …..c'ho fatto 6 facce tutte quadrate.



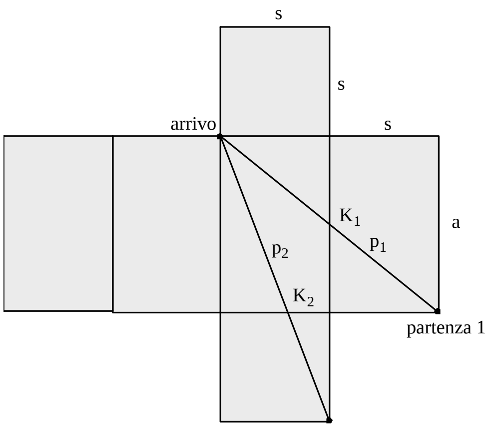
Questa ricerca è interessante per almeno due motivi: da un lato, perché obbliga ad esplorare la struttura geometrica dell'insieme degli spigoli del prisma, dall'altro perché consente di cercare tutte le strade sfruttando un importante aspetto combinatorio invece di attuare "ingenui" tentativi. Per fare ciò, si deve dapprima operare una traduzione della situazione geometrica 3D a un sistema di codificazione. La considerazione vincente è quella di "vedere" che ogni percorso minimo si compone di tre tratti, uno per ciascuna direzione degli spigoli del prisma. Per esempio, il percorso evidenziato nella figura precedente può essere codificato con la parola "abc". Tutti gli altri percorsi minimi (e solo quelli) corrispondono agli anagrammi di questa parola. Essi sono 6; eccoli:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

È possibile camminare anche su un modello di prisma quadrangolare regolare realizzato con cartoncino, per cercare nuovamente il percorso minimo, sulla superficie del solido, che unisce due suoi vertici opposti. Quale sarà la soluzione?



Per rispondere è consigliabile sfruttare il piano, considerando lo sviluppo del prisma. Questo passaggio può essere fatto concretamente tagliando un modello di prisma lungo il minor numero di spigoli in modo da "distendere" la sua superficie sul piano, o progettando direttamente lo sviluppo, o ancora facendolo solamente come attività di immagine mentale, ossia cercando di vedere con gli "occhi della mente" dove andranno a finire i vertici e quale sarà il cammino minimo che li unisce. Sullo sviluppo ottenuto con i precedenti modi, si individuano due percorsi diversi che uniscono i due vertici opposti del cubo, dato che uno dei due vertici nello sviluppo occupa due posizioni diverse. Per individuare il cammino minimo tra i due percorsi ottenuti, basta per esempio, misurare.



Le espressioni generali dei due possibili percorsi possono essere ottenute nel modo seguente:

$$p_1 = \sqrt{a^2 + (2\,s)^2} \qquad ; \qquad p_2 = \sqrt{s^2 + (a+s)^2}$$

E confrontando i due cammini si osserva che:

$$a^2 + (2\,s)^2 <> s^2 + (a+s)^2 \quad ; \quad a^2 + 4\,s^2 <> 2\,s^2 + a^2 + 2\,a\,s \quad ; \quad s <> a$$

Concludiamo che p_1 è il percorso minimo a condizione che sia $s < a$; nel caso contrario, il percorso minimo è p_2.

Cerchiamo nuovi cammini minimi. Prendiamo questa volta una piramide pentagonale regolare. Si tratta di studiare quali percorsi minimi possono essere tracciati tra due punti scelti a caso sulla superficie della piramide, per esempio tra i punti P e Q, collocati come mostra la figura seguente (tralasciamo per questioni di spazio il caso in cui P e Q si trovano entrambi su due facce triangolari):
Ricorriamo allo sviluppo e riproduciamo solo la faccia pentagonale e le facce interessate (evidenziate in grigio).

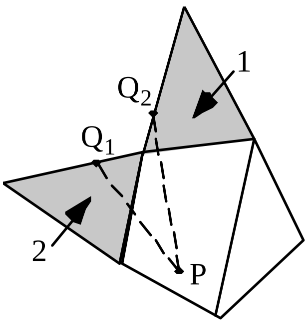


figura a

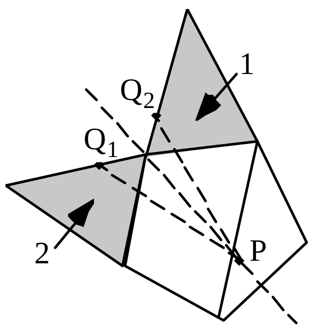
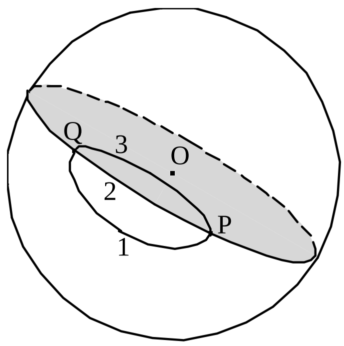


figura b

Nello sviluppo (figura a), il punto Q ha due immagini: Q_1 e Q_2. I percorsi candidati ad essere i più corti sono due: PQ_1 e PQ_2, che si articolano in due segmenti: i primi si trovano sulla faccia pentagonale; i secondi su due facce triangolari adiacenti. In generale questi due percorsi hanno lunghezze diverse, quindi il percorso minimo è il minore dei due. Nel caso particolare nel quale P si trova su un asse di simmetria del pentagono (figura b), i due percorsi hanno la stessa lunghezza e sono entrambi soluzione del problema. Si può ancora osservare che il percorso minimo è quello interamente contenuto in uno dei semipiani generati dall'asse di simmetria.

Continuando nella ricerca dei cammini minimi, il caso della superficie sferica risulta molto interessante, perché su di essa la geometria non è più euclidea: ecco un bello spunto per vivere un'esperienza in un nuovo ambito. Presi a caso due punti su tale superficie, qual è il percorso minimo che li unisce? Qui non possiamo più ricorrere allo sviluppo, perché, come si sa, la superficie sferica non può essere sviluppata su un piano. Meglio: non esiste alcuna trasformazione isometrica tra piano e sfera. In pratica, non è possibile stendere una superficie sferica su una piana, senza evitare né rotture, né piegamenti.
Non potendo più usare lo strumento dello sviluppo, siamo costretti a cercare un altro modello di superficie sferica: consigliamo un pallone da basket. La sua superficie è sufficientemente estesa e liscia da permettere di disegnarvi sopra mediante gessi o pennarelli. Nella ricerca intuitiva del percorso più breve ci si rende conto che le linee candidate sono comunque degli archi di cerchio. Questa prima osservazione libera il campo da una quantità infinita di tipi di curve possibili, di fronte alla quale ci si potrebbe perdere. Il problema si riduce quindi a stabilire quale arco di circonferenza rappresenti il percorso minimo.



Dopo qualche tentativo, possiamo intuire che il percorso più breve è quello "meno curvo", cioè l'arco della circonferenza più grande che sia possibile disegnare sulla superficie sferica. Questa linea, che rappresenta il percorso minimo tra due punti è detta geodetica. Nel piano la geodetica è la retta. Sulla superficie sferica la geodetica è appunto la circonferenza massima, quella che ha il raggio coincidente col raggio della sfera che si ottiene sezionando la superficie sferica con il piano determinato dai due punti P, Q e dal centro O della sfera.

3. Conclusioni

Nel presentare tali proposte, riteniamo importante ribadire alcuni aspetti da considerare fondamentali per l'acquisizione matematica in generale e geometrica in particolare.

- Nel proporre le attività l'insegnante deve tener conto che l'acquisizione concettuale di un oggetto in matematica, deve necessariamente passare attraverso l'acquisizione di diverse rappresentazioni in vari registri di rappresentazione semiotica (Duval, 1993, 1995, 1996): «*… il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (…) Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo*» (Duval, 1995).

Riteniamo quindi che per ciascuna proposta sia importante fornire agli studenti diverse rappresentazioni dei concetti, in vari contesti d'uso, tridimensionali e bidimensionali, concreti e immaginati, che devono essere esplicitati in diversi registri: pittorici, figurali, algebrici, proposizionali, … in modo da favorire il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra all'interno dello stesso registro (funzione di *trattamento*) o in registri semiotici diversi (funzione di *conversione*).

- La parola *modello* viene usata con due fondamentali accezioni d'uso diverse che variano a seconda del contesto: a volte con questo termine intendiamo oggetti reali, fisici, concreti di varia natura, che richiamano le proprietà del concetto del quale si sta parlando (in questo caso il modello non è altro che una particolare rappresentazione semiotica del concetto). Quando parliamo di modello in questo senso, siamo consapevoli che, per quanto raffinato sia, non potrà mai rispecchiare in pieno un concetto matematico, perché non potrà mai possedere le caratteristiche di idealità, astrazione, generalità, perfezione. Dobbiamo quindi essere costantemente coscienti dei limiti dei modelli fisici che considereremo nel proporre le diverse attività.

Altre volte parlando di modello (mentale) (D'Amore, 1999) ci riferiamo ad un'immagine forte, stabile, definitiva di un concetto. Non sempre il modello (mentale) di un concetto, inteso in questa accezione d'uso, si forma nella mente degli allievi in modo corretto; a volte si forma troppo presto, quando avrebbe dovuto solo rimanere un'immagine instabile, suscettibile di miglioramento. Per questa ragione auspichiamo che i docenti di ciascun livello scolastico forniscano successivamente varie immagini dei concetti, in continua evoluzione, per far sì che i modelli (mentali) si formino al momento giusto, quando risultano comprensivi di ciascuna caratteristica e proprietà dei concetti stessi. Per far sì che

si formino modelli corretti nella mente degli allievi, è necessario che l'insegnante favorisca la rottura di *misconcezioni* (Arrigo, 2004; D'Amore, 1999; Sbaragli, 2004), considerate come inevitabili fasi di passaggio nella costruzione del concetto.
- È importante creare situazioni conflittuali nelle quali deve emergere la natura dei *concetti figurali* (Fischbein, 1993) per far esercitare gli studenti in attività mentali, nelle quali sia necessaria la cooperazione tra l'aspetto concettuale e quello figurale. Tramite queste attività, immagini e concetti mostrano chiaramente la loro fondamentale natura, talvolta contraddittoria. Fischbein ha così aperto la strada allo studio del rapporto dinamico tra concetti e immagini in educazione geometrica e noi ne ribadiamo l'importanza, rivelando come ogni rappresentazione, sia essa tridimensionale o bidimensionale, vada sempre riletta e interpretata tramite concetti.
La teoria dei concetti figurali permette anche di capire la natura di certi errori degli studenti in geometria: alcuni stimoli figurali possono essere così devianti per gli studenti da vincere sul controllo concettuale. In questi casi, la componente figurale tende a liberarsi dal controllo formale, a non dipendere più dalla definizione. È proprio questo, che una corretta educazione matematica dovrebbe evitare, proponendo attività che facciano armonizzare i due aspetti, evitando l'insorgere di ambiguità.
L'educazione geometrica dovrebbe quindi sempre tenere ben presente questo obiettivo nell'intero suo percorso dall'infanzia alle superiori; eppure, la tradizione d'insegnamento usuale vuole che si proceda dal concreto all'astratto, relegando solo alla fine la concettualizzazione a favore di un maggiore controllo sugli aspetti figurali. Ma questo, come è stato ampiamente dimostrato, non agevola affatto l'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. È necessario, fin dall'inizio, un maggiore controllo anche concettuale, soprattutto perché gli ausili proposti per la comprensione risultano spesso di forte ostacolo per l'astrazione.
Ma il processo non deve concludersi qui: il modo con cui ciascun alunno interpreta il modello si costruisce nell'ambito della comunicazione linguistica. È solo attraverso l'esplicitazione e la comunicazione che si possono ridurre fraintendimenti ed è solo attraverso strumenti linguistici che l'insegnante può far capire in che modo lui stesso interpreta i modelli e accertarsi che le idee degli allievi siano corrette: *«…è necessario che l'allievo abbia l'occasione di presentare le proprie interpretazioni del modello e di discutere le proprie idee concettuali»* (Maier, 1998). L'uso consapevole e critico di modelli concreti potrebbe risultare insostituibile per dare senso e significato a un formalismo che risulterebbe altrimenti vuoto o incompreso, se lasciato solamente a vuote percezioni. Il ragionamento deduttivo deve guidare l'osservazione e indicare

perché è «*vero ciò che si vede*» (Maier, 1998); in questo modo, la percezione si trasforma in un processo attivo di costruzione personale.

Bibliografia

Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia. Lo spazio, l'ordine, la misura*. Milano: Juvenilia.

Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori*. Roma: Carocci. In corso di stampa.

Arrigo G. (2004). La costruzione del concetto in Matematica: immagini mentali, modelli e misconcezioni. Atti del Terzo Convegno Nazionale di Didattica della Matematica: *La matematica è difficile? 2004.* Adria (Rovigo).

www.liceobocchi.rovigo.net.

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Guastaldelli B., Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 4, 444-449.

Cerasoli M. (1999). Esempi di bufale nell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* 39. 69-81.

Cottino L., Sbaragli S. (2004). *Le diverse "facce" del cubo.* Roma: Carrocci.

D'Amore B. (1981). *Approcci matematici nella scuola dell'infanzia*. Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore B., Manini M. (1985*). Percorsi, Labirinti, Mappe. Esperienze protomatematiche nella scuola dell'infanzia.* Firenze: La Nuova Italia.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5. 37-65.

Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'École d'été 1995.

Duval R. (1996). Il punto decisivo nell'apprendimento della matematica: la conversione e l'articolazione delle rappresentazioni. In: D'Amore B. (1996). *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale di Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora. 11-26.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione*. Bologna: Pitagora.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*. 24, 139-162.

Maier H. (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria. *La matematica e la sua didattica*. 3, 271-290.

Sbaragli S. (2002). Nel mondo quotidiano dei poliedri. *La Vita Scolastica*. Area Matematica. 15, 44-48.

Sbaragli S. (2004). La rilevazione di misconcezioni in geometria. Il caso degli enti primitivi. Atti del Terzo Convegno Nazionale di Didattica della Matematica: *La*

matematica è difficile? 2004. Adria (Rovigo). www.liceobocchi.rovigo.net.
Speranza F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore B. (a cura di). (1987). *La matematica e la sua didattica*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Roma: Armando. 106.
Speranza F. (1995). Per il dibattito sulla geometria. *Lettera PRISTEM*. 16, 31-32.